Beräkningsvetenskap NV1 - F11
Peter Ankerstål
25 September 2007

1 Approximation/Kurvanpassning

1.1 Kurvanpassningsproblemet

Givet:

- Datapunkter (t_i, y_i) $i = 1...m$
- En klass F av funktioner
- Ett "närhetsmått" M

Sökt:
Den funktion f som

- tillhör klassen F
- som enligt M bäst ansluter till givna data.

Intepolation kräver att kurvan går igenom alla mätpunkter medans Minstakvadrat-approximation minimerar avståndet till punkterna. Här bestämmer man sig för tex. ett andragradspolynom och låter det gå så nära den mätdata man har som möjligt.

1.1.1 Användningsområden

- Anpassning av matematiska modeller till experimentdata
- Beräkning av approximativa värden i mellanliggande punkter
- Bestämning av trender
- Approximation av "svår" funktion med enkare sådan

1.1.2 Ansatsen

En "ansats" anger att ett uttryck skall ha en viss form men koefficienter/parametrar återstår att bestämma.

$f(t) = a + bt$ (förstagradspolynom)

Olika ansatser för olika problem:

$p(t) = a_0 + a_1 t$
$p(t) = b_0 + b_1(t - 10)$
$p(t) = c_0 + c_1(t - +1)$

1.2 Interpolation med polynom

Ex.

USAs folkmängd (miljoner invånare)
t = år
y = miljoner invånare

t	1900	1910	1920
y	75.995	91.972	105.711

Beräkna antalet invånare år 1917.

1.2.1 lösning med olämplig ansats

Tre punkter ger tre vilkor → 3 obestämda koefficienter i ansatsen.
→ andragradspolynom $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ (monomansats)

Interpolationsvillkor

$$\begin{array}{rcl|l} p(1900) & = & 75.995 & a_0 + a_1 1900 + a_2(1900)^2 = 75.995 \\ p(1910) & = & 91.975 & a_0 + a_1 1910 + a_2(1910)^2 = 91.975 \\ p(1920) & = & 105.771 & a_0 + a_1 1920 + a_2(1920)^2 = 105.771 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1900 & 1900^2 \\ 1 & 1910 & 1910^2 \\ 1 & 1920 & 1920^2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 75.995 \\ 91.975 \\ 105.711 \end{bmatrix}$$

Vi löser sedan systemet i matlab med backslash-operatorn $x = A \backslash y$

$$x = \begin{bmatrix} a_0 = ... \\ a_1 = ... \\ a_2 = ... \end{bmatrix}$$

Folkmängd 1917 $\approx$ 101.82

Nackdelar med monomsats

- Leder till full matris
- Matrisen är dessutom illa konditionerad $cond(A) = 2.8 * 10^{11}$

1.2.2 lösning med ny "bra" ansats

Newtons ansats: $p(t) = C_0 + C_1(t - 1900) + C_2(t - 1900)(t - 1910)$

Samma interpolationsvillkor som tidigare men med ny ansats får ekvationssystemet en annan form:

$C_0 + C_1(1900 - 1900) + C_2(1900 - 1900)(1900 - 1910) = 75.995$
$C_0 + C_1(1910 - 1900) + C_2(1910 - 1900)(1910 - 1910) = 91.975$
$C_0 + C_1(1920 - 1900) + C_2(1920 - 1900)(1920 - 1910) = 105.711$

$$\begin{bmatrix} C_0 & & & 75.995 \\ C_0 & 10C_1 & & 91.975 \\ C_0 & 20C_1 & 200C_2 & 105.711 \end{bmatrix} \qquad \text{Bra kondition.}$$

Vi löser systemet med framåt-substitution.

$C_0 = 75.995$
$C_1 = 1.5577$
$C_2 = -0.011190$

1.2.3 Newtons ansats generellt

$(t_k, y_k) \quad k : 1 \to m$

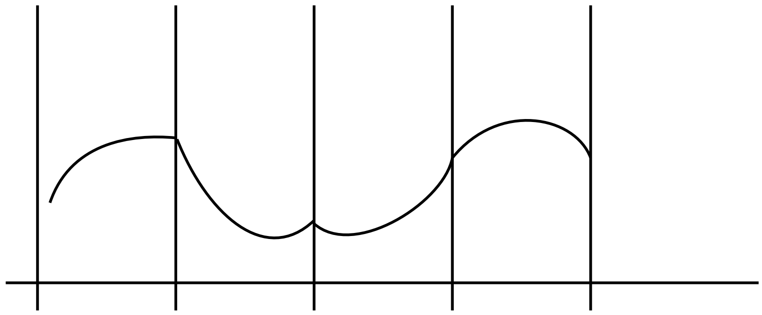
ansats:
$p(t) = C_0 + C_1(t - t_1) + C_2(t - t_1)(t - t_2) + C_{m-1}(t - t_1)(t - t_2)...(t - t_{m-1})$

En brist med polynominterpolation är att med många datapunkter så uppstår kraftiga ocillationer mellan datapunkterna vilket kan ge kraftiga fel hos mellanliggande värden.
Tumregel: Undvik vanlig polynominterpolation om antalet punkter är större än 5-6 st.

När man har många mätvärden kan man istället göra styckvis interpolation

Vanliga fall:

- Styckvis Linjär
- Styckvis Kvadratisk
- Styckvis Kubisk

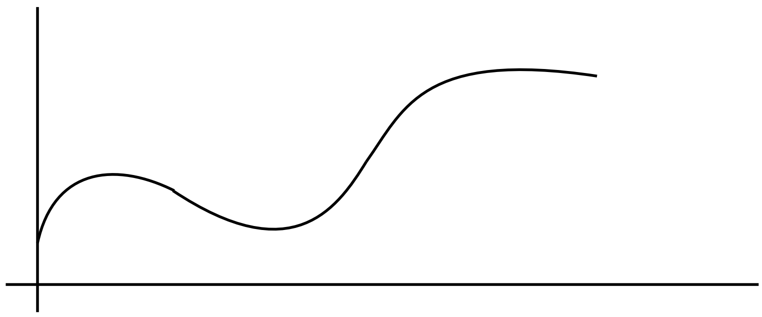


Figur 1: Styckvis kvadratisk

Diskontinuerlig derivara där stycken möts.

1.2.4 Kubiska splines

Styckvis interpolation med tredjegradspolynom där $f' och f''$ måste vara kontinuerlig mellan stycken.



Figur 2: Kubiska splines med kontinuerlig första och andraderivata