Beräkningsvetenskap NV1 - F12
Peter Ankerstål
28 september 2007

# 1 Minstakvadrat-approximation

## 1.1 Exempel

Uppmätt koncentration dioxin i luften vid olika tidpunkter t efter förbränning..

| | $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | $t_4$ | $t_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| t | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.0 | 3.0 |
| y | 1.0 | 1.7 | 2.2 | 2.5 | 2.5 |

Använd Minstakvadrat-approximation för att anpassa ett andragradspolynom till dessa mätdata.

## 1.2 lösning: analytisk metod

**Ansats:** $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$

Idealsituationen är att kurvan går igenom alla punkter.

$$\begin{array}{rcl} p(1.0) & = & 1.0 \\ p(1.5) & = & 1.7 \\ p(2.0) & = & 2.2 \\ p(2.5) & = & 2.5 \\ p(3.0) & = & 2.5 \end{array}$$

Finn $a_0, a_1, a_2$ ur dessa samband

Detta är ett överbestämt system som i allmänhet saknar lösning.

Minimera felet

$$\| \begin{bmatrix} p(1.0) \\ p(1.5) \\ p(2.0) \\ p(2.5) \\ p(3.0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.5 \\ 2.0 \\ 2.5 \\ 3.0 \end{bmatrix} \|_2^2 = \sum_{i=1}^{i} (p(t_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{5} [(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) - y_i]^2$$

$s(a_0, a_1, a_2)$

$\frac{\partial s}{\partial a_0} = \frac{\partial s}{\partial a_1} = \frac{\partial s}{\partial a_2} = 0$

$\frac{\partial s}{\partial a_0} = 2 \sum [(a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2) - y_i]$

$\frac{\partial s}{\partial a_1} = 2\sum t_2[(a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2) - y_i]$

$\frac{\partial s}{\partial a_2} = 2\sum t_2^2[(a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2) - y_i]$

$\sum a_0 + \sum a_1 t + \sum a_2 t^2 = \sum y_i$

$\sum t_i a_0 + \sum t_i a_1 t_i + \sum t_i a_2 t_i^2) = \sum t_i y_i$

$$\begin{bmatrix} \sum 1 & \sum t_i & \sum t_i^2 \\ \sum t_i & \sum t_i^2 & \sum t_i^3 \\ \sum t_i^2 & \sum t_i^2 & \sum t_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i \\ \sum y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 22.5 \\ 10 & 22.5 & 55 \\ 22.5 & 55 & 142.125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.9 \\ 21.7 \\ 51.75 \end{bmatrix}$$

$a_0 = -1.14$
$a_1 = 2.59$
$a_2 = -0.46$

$p(t) = -1.14 + 2.59t - 0.46t^2$

### 1.3 lösning: algebraisk metod

Här ett praktiskt lämpligt sätt att lösa minstakvadrat-problem.

Idealvillkor: $p(t_i) = y_i$

Vi får då ett överbestämt system:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.0 & 1.0^2 \\ 1 & 1.5 & 1.5^2 \\ 1 & 2.0 & 2.0^2 \\ 1 & 2.5 & 2.5^2 \\ 1 & 3.0 & 3.0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.7 \\ 2.2 \\ 2.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

Multiplicera hela ekvationssystemet med $A^T$ från vänster $A^T Ax = A^T y$
Insättning av våra data ger:

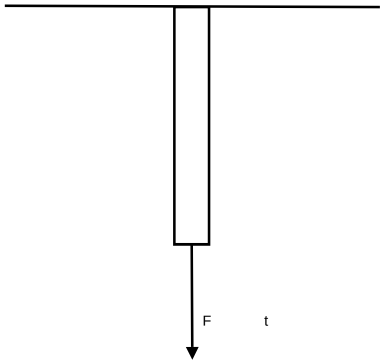
$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 22.5 \\ 10 & 22.5 & 55 \\ 22.5 & 55 & 142.125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.9 \\ 21.7 \\ 51.75 \end{bmatrix}$$

Vilket är samma system som vid den analytiska lösningen. (Som självklart också har samma lösning.)

## 2 Problemlösning

### 2.1 Heath. Övning 3.1 s 149

En lodrät balk med längden y beror på en kraft t enligt $y = x_1 + x_2 t$




Figur 1: Balk med den pålagda kraften F

Vi har följande mätdata att tillgå:

| t | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|
| y | 11.60 | 11.85 | 12.25 |

Bestäm $x_1, x_2$ genom minstakvadrat-approximation.

Normalekvationen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 15 \\ 1 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.60 \\ 11.85 \\ 12.25 \end{bmatrix}$$

$A^T T A x = A^T y$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 15 & 20 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 15 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 15 \\ 1 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 45 \\ 45 & 725 \end{bmatrix}$$

$$A^T y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 15 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11.60 \\ 11.85 \\ 12.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35.7 \\ 583.75 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$x = \begin{bmatrix} 10.925 \\ 0,065 \end{bmatrix}$$

## 2.2 Heath. Övning 7.5C

| t | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| y | 11 | 29 | 65 | 125 |

Bestäm interpolationspolynomet, använd Newtons ansats.

**Newtons ansats:** $p(t) = C_0 + C_1(t-1) + C_2(t-1(t-2) + C_3(t-1)(t-2)(t-3)$

Interpolationsvillkoren:

$p(t_i) = y_i \qquad i = 1..4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 29 \\ 65 \\ 125 \end{bmatrix}$$

Lösning ges via framåtsubstitution

$$\begin{aligned} C_0 &= 1.0 \\ C_1 &= 1.7 \\ C_2 &= 2.2 \\ C_3 &= 2.5 \end{aligned}$$

Interpolationspolynomet efter insättning:
$p(t) = 11 + 18(t-1) + 9(t-1)(t-2) + (t-1)(t-2)(t-3)$