Fourieranalys - F01
Peter Ankerstål
24 Oktober 2007

1 Lebesgue-integralen

$$\{f, \int_{\infty}^{\infty} |f(t)| < \infty = L^1(\mathbb{R})\}$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t) + g(t)| dt \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt + \int_{\mathbb{R}} |g(t)| dt$$

$$||f + g|| \leq ||f||_1 + ||g||_1 \quad ||\alpha f|| = |\alpha| \cdot ||f||$$

1.1 Nollmängd

En mängd $E \subseteq \mathbb{R}$ kallas nollmängd om det för varje $\epsilon > 0$ finns intervall $I_1, I_2, I_3...$ så att

1. $E \subseteq I_1 \cup I_2 \cup I_3...$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \epsilon$

1.1.1 Ex

$\mathbb{Q} =$ alla rationella tal $\quad \mathbb{Q}$ är en nollmängd.

Bevis
$\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5...\}$ $\quad \epsilon$ givet

$I_1 = \frac{\epsilon}{2} \quad I_1 = \frac{\epsilon}{4} \quad I_n = \frac{\epsilon}{2^n}$

$\sum = (I_n) = \epsilon(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}...) = \epsilon$

Faktum
Om $f(t) = g(t)$ för alla $t \in \mathbb{R}$ förutom t i en <u>nollmängd</u> E så att:

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) dt = \int_{\mathbb{R}} g(t) dt$$

1.1.2 Ex

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{R} \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Någon Riemann-integral finns en ty alla undersummor är 0 och alla översummor är 1.
Lebegue-integralen däremot är 0 eftersom funktionen är 0 förutom i en nollmängd.

Sensmoral: Två funktioner som skiljer sig åt på en nollmängd betraktar vi som lika.

Om f bara finns på intervallet $[a, b]$ definera

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & t \in [a, b] \\ 0 & \text{utanför} \end{cases}$$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(t)dt$$

Viktig olikhet
Komplexvärd funktion:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(t)dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt$$

Bevis

$$\int_{\mathbb{R}} = Re^{i\theta} \quad R = \left| \int_{\mathbb{R}} f(t)dt \right|$$

$$R = e^{-i\theta} \int_{\mathbb{R}} f(t)dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\theta} f(t)dt = Re \int e^{-i\theta} f(t)dt =$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{Komplex integral } = \int_{\mathbb{R}} (a(t) + ib(t)) = \int_{\mathbb{R}} a(t)dt + i \int_{\mathbb{R}} b(t)dt \\ Re \int_{\mathbb{R}} f(t)dt = \int_{\mathbb{R}} Ref(t)dt \end{array} \right]$$

$$= \int \underbrace{Re\left(e^{-i\theta} f(t)\right)}_{\leq |e^{-it} f(t)| = |f(t)|} dt \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt$$

Följdsats

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int f(t)e^{-int}dt$$

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)e^{-int}|dt = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt}_{||f||_{L^1(\mathbb{T})}}$$

2 Approximationsstats

Givet: $f : L^1(\mathbb{R}) \quad \epsilon > 0$

Det finns en funktion g som är kontinuerligt deriverbar och som är $= 0$ utan för ett begränsat intervall och så att $||f - g|| = \int_{\mathbb{R}} |f(t) - g(t)|dt < \epsilon$

2.1 Bevisskiss

Välj a så att $\int |f(t)|dt > \frac{\epsilon}{3} \quad |t| \geq a$
Approximera $f(t)$ på $-a \leq t \leq a$ med trappstegsfunktion $h(t)$

$$\int_{-a}^{a} |f(t) - h(t)|dt \leq \frac{\epsilon}{3}$$

Runda av hörnen ger $g(t)$

$$\int |h(t) - g(t)|dt \leq \frac{\epsilon}{3}$$

3 Rieman-Lebesgues lemma

Om $f \in L^1(I)$ så är

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_I f(t) e^{i\lambda t} dt = 0$$

3.1 Bevis

Fall 1 $\quad f =$ Snäll funktion (kontinuerligt deriverbar) och 0 utanför begränsat intervall $[a, b]$

$$\int_I g(t)e^{i\lambda t}dt = \int_a^b g(t)e^{i\lambda t}dt = \underbrace{\left[\frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda} g(t)\right]_a^b}_{0 \text{ ty } g(a)=g(t)=0} - \frac{1}{i\lambda}\int_a^b e^{i\lambda t} g'(t)$$

$$\left|\int_I g(t)e^{i\lambda t}dt\right| \leq \frac{1}{|\lambda|}\int |e^{i\lambda t} g'(t)|dt$$

$$= \frac{1}{|\lambda|}\int_a^b |g'(t)|dt \leq \frac{1}{|\lambda|} \quad M(b-a) \to 0 \text{ då } \lambda \to \infty$$

Allmänna fallet $\quad$ Approximera f med snäll funktion g
$\int_I |f(t) - g(t)| < \epsilon$

$$\left|\int_I f(t)e^{i\lambda t}dt\right| = \left|\int_I g(t)e^{i\lambda t}dt + \int_I (f(t) - g(t))dt\right|$$

$$\leq \left|\int_I g(t)e^{i\lambda t}dt\right| + \int_I |\ (f(t) + g(t))e^{i\lambda t}|dt < \left|\int g(t)e^{i\lambda t}dt\right| + \epsilon < \epsilon + \epsilon$$

om $|\lambda| > \omega$

3.2 Följdsats

om $f \in \underbrace{L^1(\mathbb{T})}_{\text{periodisk } 2\pi} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \hat{f}(n) = 0$

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \lim_{\omega\to\pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$$