Beräkningsvetenskap NV1 - F17
Peter Ankerstål
10 October 2007

1 Ordinära Differentialekvationer

1.1 Tillämpningsexempel

Omvandling av glukos till glykonsyra
glykos + celler → glukonolakton
glukonolakton + H_2O → glukonsyra

Sattelit i omloppsbana.

1.2 ODE

$y'(t) = -ay(t)$	kan lösas analytiskt.
$y(t) = -aCe^{-at} = -ay(t)$	är en lösning för alla C

Begynnelsevillkor:

y(0) = 10
ger $10 = y(0) = Ce^{-a0} = C$

1.3 Ordning hos ODE

$y'(t) = -ay(t)$	Första ordningen
$y''(t) = g(t, y(t), y'(t))$	Andra ordningen

Högre ordningens ODE kan skrivas om som ett system av första ordningens ODE.
Ex

$$\begin{aligned} y''(t) &= g(t, y(t), y'(t)) \\ y(0) &= \alpha \\ y'(0) &= \beta \end{aligned} \tag{1}$$

Omskrivning till första ordningen $w(t) = y'(t), w'(t) = g(t, y(t), w(t))$
Två obekanta men bara en enkvation, vi kompletterar med $y'(t) = w(t)$
Alltså:

$$\begin{aligned} w'(t) &= g(t, y(t), w(t)) \\ y'(t) &= w(t) \end{aligned}$$

$$y(0) = \alpha$$

$$w(0) = y'(0) = \beta$$

1.4 Generella modeller och specifika fall

- ODE beskriver generella system/fenomen
- Specialfall fås genom valet av parametrrar och begynnelsevärden.

1.5 Grundide: Diskretisering

Kontinuerligt begynnelsevärdesproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad t > 0$$
$$y(0) = \alpha$$

Väj diskreta punkter $t_k \qquad k = 0, ..., n$
och approximera y(t) i dessa punkter.

1.6 Eulers framåtdifferensmetod (Euler Framåt)

Ide:

$$y'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(h)}{h}$$

h litet

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(h)}{h}$$

Insättning ger:

$$\frac{y(t+h) - y(h)}{h} \approx f(t, y(t) \Rightarrow y(t+h) \approx y(t) + h * f(t, y(t))$$

För $t = t_k$

$$y(t_k + h) \approx y(t_k) - h * f(t_k, y(t_k))$$

Den exakta lösningen funktionen $y(t)$ uppfyller alltså ovanstående med ungefärlig likhet.

Nu definerar vi den approximativa lösningen, siffrevärdena $y_k, k = 0...n$ genom:

$$y_{k+1} = y_k + h * f(t_k, y_k)$$
$$y_0 = y(0) = \alpha$$

1.7 Ex. 9.8 Heath s.393

$$y' = y$$
$$y(0) = 0$$

Beräkna lösningen fram till $t = 1$ med euler framåt, $h = 0.5$
I detta fall är $f(t_k, y_k)) = y(t)$

Euler framåt:

$$y_{k+1} = y_k + h * f(t_k, y_k) = y_k + hy_k$$
$$y_0 = y(0) = 1$$

$$y_1 = y_0 + 0.5y_0 = 1.5$$
$$y_2 = y_1 + 0.5y_1 = 1.5 + 0.75 = 2.25$$