

## 1 Ordinära Differentialekvationer

### 1.1 Sattelitproblemet (Newtons gravitation)

- Planet i origo
- Sattelit med position  $(x(t), y(t))$  vid tiden  $t$

Newtons mekanik ger:

$$x''(t) = -k \frac{x(t)}{\left(\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\right)^3}$$
$$y''(t) = -k \frac{y(t)}{\left(\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\right)^3}$$

Skriv om som ett system av första ordningen.

$$x''(t) = -k \frac{x(t)}{\left(\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\right)^3}$$
$$y''(t) = -k \frac{y(t)}{\left(\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\right)^3}$$
$$u(t) = x'(t)$$
$$v(t) = y'(t)$$

Vektorform:

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -k \frac{x(t)}{\left(\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\right)^3} \\ -k \frac{y(t)}{\left(\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\right)^3} \\ u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

Euler framåt

$$\begin{bmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ x_k \\ y_k \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} -k \frac{x(t_k)}{\left(\sqrt{x^2(t_k) + y^2(t_k)}\right)^3} \\ -k \frac{y(t_k)}{\left(\sqrt{x^2(t_k) + y^2(t_k)}\right)^3} \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix}$$

## 1.2 Eulers bakåtmetoden (Euler Bakåt)

Euler bakåt är det samma som Euler framåt men vi evaluerar högerledet i  $y_{k+1}$  istället för  $y_k$

$$\begin{aligned}y_{k+1} &= y_k + h * f(t_{k+1}, y_{k+1}) \\ y_0 &= y(0) = \alpha\end{aligned}$$

För att få  $y_{k+1}$  måste vi lösa den i allmänhet icke linjära ekvationen  $y_{k+1} - y_k - h * f(t_{k+1}, y_{k+1}) = 0$

- Euler bakåt är en implicit metod
- Euler framåt är en explicit metod
- Euler bakåt är mer stabil

## 1.3 Ex. 9.9 Heath s.399

$$\begin{aligned}y' &= -y^3 \\ y(0) &= 1\end{aligned}$$

Euler bakåt  $h = 0.5$   $T = 0.5$

$$y_{k+1} = y_k + h(-y_{k+1}^3)$$

$$y_1 = y_0 + hy_1^3 = 1 - hy_1^3$$

Heath använder här fixtpunktsiteration för att finna  $y_{k+1}$  och sätter in dess värde i  $y_k + h(-y_{k+1}^3)$  och därmed är vi klara med ett steg av Euler bakåt.

## 1.4 Trapetsmetoden - Implicit metod

$y'(t) = f(t, y(t))$  Integrera från  $t_k$  till  $t_{k+1}$

$$\underbrace{\int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t) dt}_{y(t_{k+1}) - y(t_k)} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt \approx T(h) = \frac{h}{2} [f(t_k, y(t_k)) + f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))]$$

ger

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(t_k, y(t_k)) + f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))]$$

## 1.5 Runge-Kutta - Klass av metoder

### 1.5.1 Heuns-metod

Utgå från trapetsmetoden men ersätt HL  $y_{k+1}$  med ett preliminärt värde beräknat med Euler framåt.

$\tilde{y}_{k+1}$  Euler framåt

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(t_k, y(t_k)) - f(t_{k+1}, \tilde{y}(t_{k+1}))]$$

Ett vanligt alternativt formuleringssätt är

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2} [k_1 + k_2] \\ k_1 &= f(t_k, y_k) \\ k_2 &= f(t_k + h, \underbrace{y_k + hk_1}_{y_{k+1} \text{ Euler}}) \end{aligned}$$

### 1.5.2 Den Klassiska Runge-Kutta metoden rk4 (1905)

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, y_k) \\ k_2 &= f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 &= f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_2) \end{aligned}$$

## 1.6 Nogrannhet

Lokalt trunckeringsfel

$l_k = y_y - u_{k-1}(t_k)$   $u_{k-1}$  är den exakta lösningen

Globala felet

$e_k = y_k - y(t_k)$

Nogrannhetsordning  $p$  om det lokala trunckeringsfelet är  $l_k = O(h^{p+1})$