Beräkningsvetenskap NV1 - F18
Peter Ankerstål
10 Oktober 2007

1 Ordinära Differentialekvationer

1.1 Sattelitproblemet (Newtonsk gravitation)

- Planet i origo
- Sattelit med position $(x(t), y(t))$ vid tiden t

Newtons mekanik ger:

$$x''(t) = -k\frac{x(t)}{\left(\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\right)^3}$$
$$y''(t) = -k\frac{y(t)}{\left(\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\right)^3}$$

Skriv om som ett system av första ordningen.

$$x''(t) = -k\frac{x(t)}{\left(\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\right)^3}$$
$$y''(t) = -k\frac{y(t)}{\left(\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\right)^3}$$
$$u(t) = x'(t)$$
$$v(t) = y'(t)$$

Vektorform:

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -k\frac{x(t)}{\left(\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\right)^3} \\ -k\frac{y(t)}{\left(\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\right)^3} \\ u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

Euler framåt

$$\begin{bmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ x_k \\ y_k \end{bmatrix} + h\begin{bmatrix} -k\frac{x(t_k)}{\left(\sqrt{x^2(t_k)+y^2(t_k)}\right)^3} \\ -k\frac{y(t_k)}{\left(\sqrt{x^2(t_k)+y^2(t_k)}\right)^3} \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix}$$

1.2 Eulers bakåtdifferensmetod (Euler Bakåt)

Euler bakåt är det samma som Euler framåt men vi evaluerar högerledet i y_{k+1} istället för y_k

$$y_{k+1} = y_k + h * f(t_{k+1}, y_{k+1})$$
$$y_0 = y(0) = \alpha$$

För att få y_{k+1} måste vi lösa den i allmänhet ickelinjära ekvationen $y_{k+1} - y_k - h * f(t_{k+1}, y_{k+1}) = 0$

- Euler bakåt är en implicit metod
- Euler framåt är en explicit metod
- Euler bakåt är mer stabil

1.3 Ex. 9.9 Heath s.399

$$y' = -y^3$$
$$y(0) = 1$$

Euler bakåt $\quad h = 0.5 \quad T = 0.5$

$y_{k+1} = y_k + h(-y_{k+1}^3)$

$$y_1 = y_0 + hy_1^3 = 1 - hy_1^3$$

Heath använder här fixtpunktsinteration för att finna y_{k+1} och sätter in dess värde i $y_k + h(-y_{k+1}^3)$ och därmed är vi klara med ett steg av Euler bakåt.

1.4 Trapetsmetoden - Implicit metod

$y'(t) = f(t, y(t))$ Integrera från t_k till t_{k+1}

$$\underbrace{\int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)}_{y(t_{k+1})y(t_k)} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))dt \approx T(h) = \frac{h}{2}\left[f(t_k, y(t_k) - f(t_{k+1}, y(t_{k+1})\right]$$

ger

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(t_k, y(t_k) - f(t_{k+1}, y(t_{k+1})\right]$$

1.5 Runge-Kutta - Klass av metoder

1.5.1 Heuns-metod

Utgå från trapetsmetoden men ersätt HL y_{k+1} med ett preliminärt värde beräknat med Euler framåt.

$\tilde{y}_{k+1}$ Euler framåt

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(t_k, y(t_k) - f(t_{k+1}, \tilde{y}(t_{k+1})\right]$$

Ett vanligt alternativt formuleringssätt är

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}\left[k_1 + k_2\right] \\ k_1 &= f(t_k, y_k) \\ k_2 &= f(t_k + h, \underbrace{y_k + hk_1}_{y_{k+1}Euler}) \end{aligned}$$

1.5.2 Den Klassiska Runge-Kutta metoden rk4 (1905)

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, y_k) \\ k_2 &= f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 &= f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_2) \end{aligned}$$

1.6 Nogrannhet

Lokalt trunkeringsfel
$l_k = y_y - u_{k-1}(t_k)$ $\quad u_{k-1}$ är den exakta lösningen

Globala felet
$e_k = y_k - y(t_k)$

Nogrannhetsordning p om det lokala trunkeringsfelet är $l_k = O(h^{p+1})$