

## 1 Fråga 16

### 1.1 Trapetsformeln

Beräkna integralen:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = (e - 2) \approx 0.7182818285$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] = \frac{h}{2} \left( f(x_0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(x_n) \right)$$

**1.1.1**  $h = \frac{1}{2}$

$$\frac{1/2}{2} \left( f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \right) = \frac{1}{4} \left( 0^2 e^0 + 2 \left( \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{\frac{1}{2}} \right) + 1^2 e^1 \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} + e \right) = 0.885660616$$

**1.1.2**  $h = \frac{1}{4}$

$$\frac{1/4}{2} \left( 0^2 e^0 + 2 \left( \left(\frac{1}{4}\right)^2 e^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{2}{4}\right)^2 e^{\frac{2}{4}} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 e^{\frac{3}{4}} \right) + 1^2 e^1 \right) = \frac{1}{8} \left( \left( \frac{1}{8} e^{\frac{1}{4}} + \frac{4}{8} e^{\frac{2}{4}} + \frac{9}{8} e^{\frac{3}{4}} \right) + e \right) = 0.7605963324$$

### 1.2 Richardsonextrapolation

$$T\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{T\left(\frac{1}{4}\right) - T\left(\frac{1}{2}\right)}{3} = 0.7189082379$$

### 1.3 Slutsats

När steglängden halverades minskade felet med en faktor fyra. Från  $\approx 0.1673787875$  till  $\approx 0.04231450394$  När vi dessutom använde oss av Richardsonextrapolation minskade felet ytterligare med en faktor  $\approx 68!$

## 2 fråga 17

### 2.1 Simpsons formel

Beräkna integralen:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = (e - 2) \approx 0.7182818285$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left( f(x_0) + 4 \sum_{k=2m+1}^{n-1} f(x_k) + 2 \sum_{k=2m}^{n-1} f(x_k) + f(x_n) \right)$$

**2.1.1**  $h = \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{12} \left( 4 \left( \left( \frac{1}{4} \right)^2 e^{\frac{1}{4}} + \left( \frac{1}{4} \right)^2 e^{\frac{1}{4}} \right) + 2 \left( \left( \frac{2}{4} \right)^2 e^{\frac{2}{4}} \right) + e \right) = 0.7189082379$$

### 2.2 Slutsats

Vi ser här att felet är mycket litet trots steglängden är relativt stor och vi inte använt oss av något trick för att förbättra vårt resultat.

## 3 Figurer

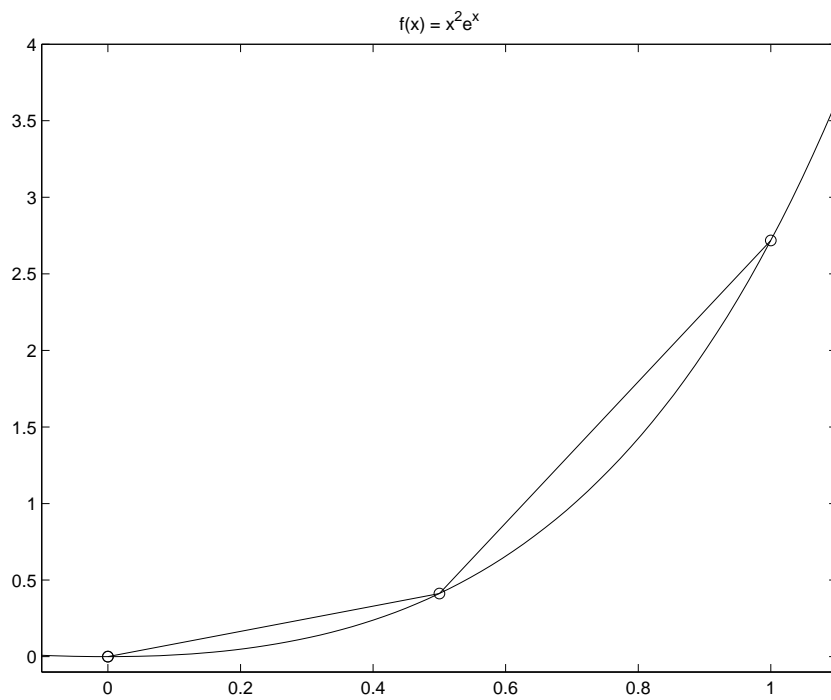


Figure 1:  $h = \frac{1}{2}$

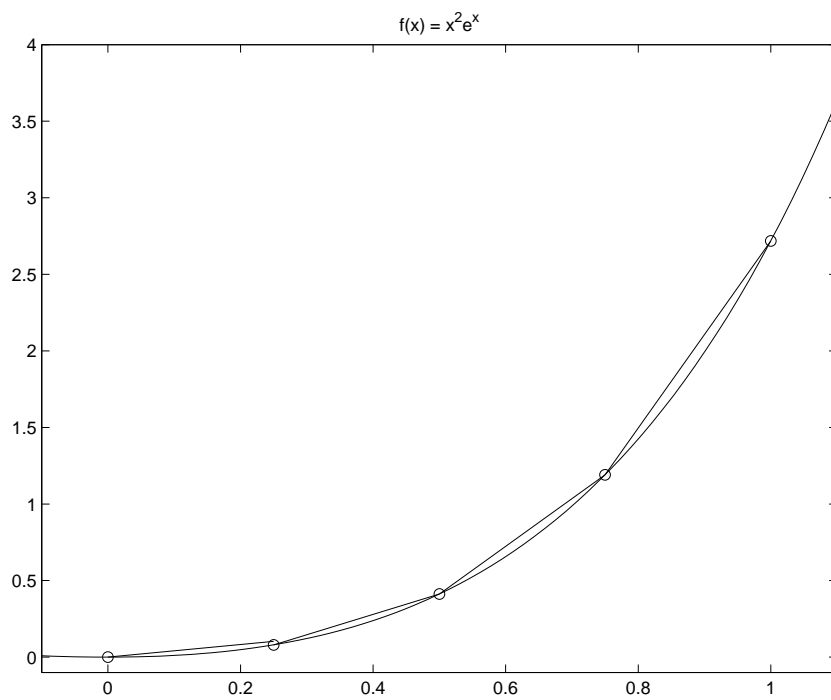


Figure 2:  $h = \frac{1}{4}$