Mekanik MN2 - F11
Peter Ankerstål
26 November 2007

1 Hamiltons princip och Lagrange Ekvationer

1.1 Inledning: Variationsräkning

Vi har en variabel t (i vårt fall tiden)

Modellsystem med en frihetsgrad:
$x = x(t)$ Koordinat som beror av t.
$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$ Hastighet som beror av t.

Ex: kinetisk energi vid endimensionell rörelse längs x-axeln: $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$

De funktioner vi skall betrakta är av formen:

$$L(x, \dot{x}; t)$$

Senare $L = T - U$ Skillnaden mellan E_p och E_k

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \qquad L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Variationsprincip

$$\int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}; t)dt$$

Vilken väg mellan t_1 och t_2 väljer vårt system?

Knep: $x(\alpha, t) = \underbrace{x(0, t)}_{x(t)} = \alpha\eta(t)$

Vi ser efter om $x(t)$ och $\dot{x}(t)$ är det optimala sättet att ta sig från t_1 till t_1 Villkor: $\eta(t)$ $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$

$$J(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} L(x(\alpha), \dot{x}(\alpha, t); t)dt$$

Variationsprincip: Av alla möjliga vägar
$x(\alpha, t) = x(t) + \alpha\ \eta(t)$
$\dot{x}(\alpha, t) = \dot{x}(t) + \alpha\ \dot{\eta}(t)$ väljer den fysiska verkligheten den som svarar mot minimum hos integralen.

Nödvändigt villkor för att $\alpha = 0$ ger minimum hos $J(\alpha)$ är

$$\left(\frac{\partial J}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \alpha}}_{\eta(t)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \dot{\alpha}}}_{\dot{\eta}(t)} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial x}\eta(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}(t)dt$$

Partiell integration:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}(t)dt = \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial t}\eta(t)\right]_{t_1}^{t_2}}_{0} - \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right]\eta(t)dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right]\eta(t)dt = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0}$$

1.2 Hamiltons princip

Börjar att formulera Hamiltons principer för ett mekaniskt system där krafterna är monogena dvs kan härledas ur en potentialfunktion.
Potentialfunktion $U(q_1, q_2, ...q_\phi, \dot{q}_1, \dot{q}_2...\dot{q}_\phi, t)$ med ϕ frihetsgrader.

Ex Fallet med centralrörelse för en partikel runt kraftcentrum $\qquad \phi = 2$
$U = U(r)$ beror endast av en koordinat
Rörelsen

$$\begin{cases} r(t) \\ \theta(t) \end{cases}$$

q behöver ej ha dimensionen längd.

1.3 Lagrange ekvationer

Hamiltons Princip

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, ...q_\phi, \dot{q}_1, \dot{q}_2...\dot{q}_\phi, t)dt$$

har extremvärde vilket ger:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad i = [0, \phi]$$