

1 Relativistisk rörelsemängd

Generalisering av Newtons andra lag för en partikel

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad \text{i } S$$

Förändringen av rörelsemängd per tidsenhet är lika med kraften.

1.1 Effekt-Energi

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{dT}{dt} \quad \text{Klassisk mekanik}$$

Relativistiskt gäller

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{P}}{dt} \\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} &= m\mathbf{u} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} &= \underbrace{\left(m\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)}_{=u \frac{du}{dt}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + m \underbrace{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}_{u^2} \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}}_{= \frac{1}{c^2} u \frac{du}{dt}} \\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} &= m \frac{du}{dt} \frac{u(1 - \frac{u^2}{c^2}) + \frac{u^2}{c^2}}{(1 - \frac{u^2}{c^2})^{3/2}} \\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} &= \frac{1}{(1 - \frac{u^2}{c^2})^{3/2}} m u \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ \boxed{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = \frac{dE}{dt}} \end{aligned}$$

Speciellt för system som från början har hastighet $u = 0$

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dt &= \int_0^t \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ T - 0 &= \left[\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right]_{u=0}^u \end{aligned}$$

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2$$

System av två partiklar 1 och 2

Totala rörelsemängden $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$

Totala energin $E_1 + E_2$

$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2, \frac{1}{c}(E_1 + E_2)$ \mathbf{P} och $\frac{E}{c}$ transformeras som en partikel.

2 Additionsteoremet för hastigheter

$$u_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Galilei: $u_x = u'_x + v$

Relativistiskt: $u'_x + v \leq c$ (gäller vid älgjakt)

Vi utgår från den inversa Lorentztransformationen

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + \frac{v}{c}c\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad c\Delta t = \frac{c\Delta t' + \frac{v}{c}\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'} = \frac{\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x'}{\Delta t'}}$$

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} \rightarrow u'_x, \quad \Delta t' \rightarrow 0$$

$$\boxed{u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}}$$

3 Relativistiska kollisioner och dopplereffekten

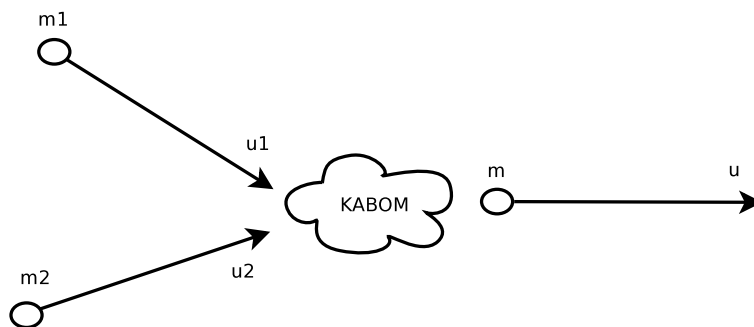
Totala rörelsemängden bevarad \Rightarrow

Totala energin bevarad

Begreppen elastisk och inelastisk stöt får en ny mening.

3.1 Ex

Två partiklar med massorna m_1 och m_2 och hastigheterna u_1 och u_2 . Partiklarna sammanstötter och bildar en enda partikel. Sök massan m och hastigheten u hos den nya partikeln.



Figur 1: Relativistisk stöt

Rörelsemängdensbevarande

$$\frac{m_1 \mathbf{u}_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + \frac{m_2 \mathbf{u}_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (1)$$

Energins bevarande

$$\frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (2)$$

$$\frac{m_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + \frac{m_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (3)$$

Sätt in 3 i 1

$$\begin{aligned} \frac{m_1 \mathbf{u}_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + \frac{m_2 \mathbf{u}_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} &= \left(\frac{m_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + \frac{m_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) \mathbf{u} \\ \mathbf{u} &= \frac{\frac{m_1 \mathbf{u}_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + \frac{m_2 \mathbf{u}_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}}{\frac{m_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + \frac{m_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}} \rightarrow \frac{m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2}{m_1 + m_2}, \quad \frac{u^2}{c^2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$