

## 1 Hamiltons Equations of Motion

$$L = T - V$$
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow H(q, p, t) = p\dot{q} - L|_{p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}$$

$$L(q, \dot{q}, t) = L_0(q, t) + \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot T \cdot \dot{\mathbf{q}} \rightarrow H = \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{p} - \mathbf{a}) - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}} \mathbf{T} \dot{\mathbf{q}} - L_0$$

Om Hamiltonianen inte har något explicit tidsberoende och potentialen  $V$  är konservativ så är Hamiltonianen automatiskt systemets totala energi

$$H = T + V = E$$

Rörelsen ges genom de kanoniska ekvationerna:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

En variabel är cyklisk om den inte finns med explicit i Hamiltonianen vilket också ger att

$$\frac{\partial H}{\partial q_0} = 0 \rightarrow p_0 = \alpha$$

Dvs det generaliserade momentat är konstant.

## 2 Canonical Transformations

Vi vill transformera Hamiltonianen  $H$  till en ny funktion  $K(Q, P, t)$  på ett sådan sätt att rörelseekvationerna i de nya koordinaterna har formen

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}$$

funktionen  $K$  har rollen som Hamiltonian i de nya koordinaterna. Transformationen måste vara problemoberoende. Dvs  $(Q, P)$  måste vara kanoniska koordinater för alla system av samma frihetsgrad.

$$p_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}$$

Där  $F$  är den genererande funktionen.

## 2.1 Exempel: Harmonisk Oscillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$$

där vi sätter  $k/m = \omega^2$ , vilket ger

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2q^2)$$

Vi söker en transformation på formen

$$\begin{aligned} p &= f(P) \cos Q \\ q &= \frac{f(P)}{m\omega} \sin Q \end{aligned}$$

Vilket ger oss H som funktion av Q och P

$$K = H = \frac{f^2(P)}{2m}(\cos^2 Q + \sin^2 Q) = \frac{f^2(P)}{2m}$$

så att Q är en cyklisk variabel. Där vi söker f(P) som gör transformationen kanonisk. Om  $F = F_1 = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$  får vi de kanoniska transformationerna

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q \\ P &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q} \end{aligned}$$

Vi löser detta system för p och q

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \\ p &= \sqrt{2Pm\omega} \cos Q \end{aligned}$$

vilket ger att  $f(P) = \sqrt{sm\omega P}$ . De nya koordinaterna ger oss en hamiltonian på formen

$$H = \omega P$$

Eftersom hamiltonianen är cyklisk i Q ser vi direkt att momentat P är konstant och vi får

$$P = \frac{E}{\omega}$$

Ekvationen för rörelsen i Q har nu reducerats till denna enkla form

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega$$

Med den omedelbara lösningen

$$Q = \omega t + \alpha$$

I den gamla koordinaterna får vi rörelsen

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha)$$
$$p = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \alpha)$$

## 2.2 Poisson Brackets

TVå funktioner  $f(p, q)$   $g(p, q)$

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}$$

där

$$\{p_i, q_i\} = \delta_{ij}$$
$$\{p_i, p_i\} = 0$$
$$\{q_i, q_i\} = 0$$

Om en transformation är kanonisk så är alltid  $\{P, Q\} = 1$

## 3 Hamilton-Jacobi Theory

Vi kan automatiskt försäkra att de nya variablerna kommer vara konstanta i tiden om vi kräver att den transformerade Hamiltonianen,  $K$  är identiskt noll, eftersom detta leder till rörelsekvationerna

$$\frac{\partial K}{\partial P_i} = \dot{Q}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_i = \beta_i$$
$$\frac{\partial K}{\partial Q_i} = \dot{P}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad P_i = \alpha_i$$

Vi vet sedan innan att  $K$  är relaterad till den gamla Hamiltonianen och den genererande funktionen som

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

och måste därför vara noll om  $F$  uppfyller ekvationen

$$H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Det är smidigt att välja  $F$  som en funktion av de gamla koordinaterna  $p_i$  och de nya konstanta momenta  $P_i$  och eventuellt tiden  $t$ .  $F = F_2(q, P, t)$ . För att skriva ner Hamiltonianen använder vi oss av "transformations-ekvationerna"

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$$

så att

$$H\left(q, \dots, q_n; \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}; t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

Denna ekvation kallas the *Hamilton-Jacobi equation*.

Vi söker nu den genererande funktionen  $F_2$  där

$$F_2 \equiv S = S(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t)$$

Denna ekvation kallas för *Hamilton's Principal Function*

$$P = \frac{\partial S}{\partial q} \quad Q = \frac{\partial S}{\partial P}$$

Vi sätter i detta i Hamiltonianen och får

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

### 3.1 Exempel: Harmonisk Oscillator

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \left( \frac{p^2}{m} + kq^2 \right)$$

Detta ger oss Hamilton-Jacobi Equation

$$\begin{aligned} H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} &= 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + kq^2 \right) + \frac{\partial S}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Separation av variabler  $S(q, t) = W(q) + E(t)$  ger oss

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{m} (W')^2 + kq^2 \right) + \dot{E} = 0$$

Där vi har att  $\dot{E} = \alpha$  och  $E = \alpha t$

$$S(q, t) = W(q) + \alpha t$$

$$W' = \sqrt{-m(2\alpha + kq^2)}$$

$$W = \int dq \sqrt{-m(2\alpha + kq^2)}$$

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha}, \quad \beta = t + \int \frac{1}{2} \frac{-2m}{\sqrt{m(2\alpha + kq^2)}} = t - \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \left( \sqrt{\frac{k}{-2\alpha}} q \right)$$

och slutligen koordinaterna som funktioner av tid

$$q(t) = \sqrt{\frac{-2\alpha}{k}} \sin \left[ \sqrt{\frac{k}{m}}(-\beta - t) \right]$$

$$p(t) = \sqrt{-2m\alpha} \cos \left[ \sqrt{\frac{k}{m}}(-\beta - t) \right]$$

## 4 Action-Angle Variables

Om ett fysiskt system är periodiskt i alla koordinater så kan man införa en ny typ av koordinat som kallas Action-Angle Variables där action-variabeln definieras som

$$I = \oint p dq$$

Dvs integralen över den slutna kurvan i Fas-rummet. Angle-variabeln är då

$$\phi_i = \frac{\partial H}{\partial I_i} \Rightarrow \phi_i = \nu t + \phi_0$$

### 4.1 Exempel: Harmonisk Oscillator

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2 = E$$

Här kan vi enkelt beräkna integralen eftersom vi vet att den är en ellips i fas-rummet och att axlarna ges av

$$p_0 = \sqrt{2mE}, \quad q_0 = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

$$I = \oint p dq = \pi p_0 q_0 = \frac{2\pi E}{\omega}$$

Resultatet av detta

$$\tilde{H} = E = \frac{1}{2\pi}\omega I$$

$$\dot{I} = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \text{const}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial I} = \nu \quad \Rightarrow \quad \phi = \nu t + \phi_0$$