

LIUVILLES THEOREM

Peter Ankerstål

16 oktober 2008

1 Bakgrund

I klassisk mekanik vet vi från initialvillkoren ett systems rörelse exakt för all framtid, men i komplexa system så kan det vara väldigt opraktiskt att beräkna en exakt lösning. Ett exempel är en gas med ett stort antal molekyler – låt säga några mol, dvs i storleksordningen 10^{23} st. Det är uppenbart att vi inte kan beräkna ett systems rörelse utifrån en exakt beskrivning där varje molekyl har ett antal initialvillkor i position och hastighet. Istället kan vi se systemet ur en statistisk synvinkel och använda oss av ett fåtal egenskaper hos ett makrosystem vid t_0 , såsom systemets temperatur eller totala energi. Statistisk mekanik försöker över huvud taget inte lösa problemet exakt utan använder sig av dessa mer globala egenskaper hos ett system och en statistisk bild av mikrosystemens tillstånd i makrosystemet. På det här sättet kan man beräkna makrotillståndet som ett ”snitt” av mikrotillstånden.

2 Liouvilles sats

Om varje mikrosystem (molekyl eller partikel) representeras av en punkt i fasrummet så representeras makrosystemet som en slags svärm i fasrummet. Liouvilles sats säger att densiteten av mikrosystem i närheten av ett specifikt mikrosystem förblir konstant över tid.

Densiteten i ett system kan variera med tiden på två olika sätt, dels implicit beroende eftersom koordinaterna för ett system (q_i, p_i) ¹ varierar med tiden och systemet rör sig genom fasrummet. Dessutom så kan densiteten bero explicit på tiden när vi evaluerar den vid en fix punkt i fasrummet. Ett uttryck för densitetens tidsberoende ges av

$$\frac{d\rho}{dt} = [\rho, H] + \frac{\partial\rho}{\partial t} \quad (1)$$

där den första² termen är det implicita beroendet och den andra termen det explicita beroendet.

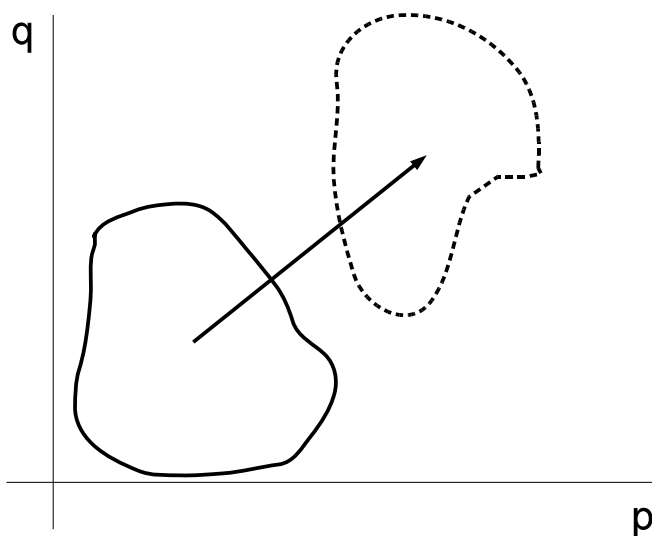
Vi tittar på ett specifikt mikrosystem i fasrummet, systemet omges av ett antal mikrosystem som skapar en volymen. Systemet kommer att utvecklas med tiden och punkterna i rummet som definerar volymen kommer att röra sig i fasrummet, volymen kan även ändra form med tiden. I figur 1 ser vi ett exempel på ett system som rört sig från en tid t_1 till t_2 . Det är tydligt att antalet mikrosystem inom volymen kommer att vara konstant, detta eftersom ett system inuti volymen omöjligt kan lämna den. Detta beror på att

¹Systemets generaliserade koordinater och momenta

² $[\rho, H]$ är en Poisson bracket där H är Hamiltonianen för systemet och ρ är densiteten av mikrosystem. Poisson bracket defineras som

$$[u, v]_{q,p} = \frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v}$$

om ett mikrosystem skulle ta sig ur volymen är det tvunget att vid någon tidpunkt vara på exakt samma ställe som ett av mikrosystemen som definierar randen av volymen. Eftersom varje punkt i fasrummet har en unikt förutsägbar framtid så kommer dessa båda punkter att röra sig tillsammans för all framtid, alltså kan punkten aldrig lämna volymen. Exakt samma argument gäller för en punkt i fasrummet som befinner sig utanför volymen. En punkt utanför volymen kan aldrig ta sig in i volymen.



Figur 1: En volym vid två olika tidpunkter i fasrummet

Förflyttningen i fasrummet kan karakteriseras av en kanonisk transformation. Enligt Poincarés integral-invariant så är en volym i fasrummet invariant under en kanonisk transformation, därför kan volymen som ett mikrosystem upptar i fasrummet aldrig ändras under en sådan transformation. Alltså är både antalet system i volymen dN och volymen själv dV konstant och det ger oss att densiteten

$$\rho = \frac{dN}{dV} \quad (2)$$

måste vara konstant. Dvs

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (3)$$

Vilket bevisar Liouvilles sats. Detta resultat insatt i ekvation (1) ger oss den alternativa formuleringen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -[\rho, H] \quad (4)$$

När ett antal mikrosystem är i statistisk jämvikt, är antalet mikrosystem i ett givet tillstånd konstant i tiden. Vilket är detsamma som att säga att densiteten av mikrosystem vid en given plats i fasrummet inte ändras med tiden.